TUGAS AKHIR - SM141501

KONTRUKSI FUNGSI LYAPUNOV UNTUK DESAIN PENGENDALI PADA MODEL BRUSSELATOR

RIZKY RAKHMAWAN
NRP 1210 100 053

Dosen Pembimbing:
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Dra. Titik Mudjiati, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

FINAL PROJECT - SM141501

CONSTRUCTION LYAPUNOV FUNCTION FOR CONTROLLER DESIGN ON MODEL BRUSSELATOR

RIZKY RAKHMAWAN
NRP 1210 100 053

Supervisor:
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Dra. Titik Mudjiati, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN

KONTRUKSI FUNGSI LYAPUNOV UNTUK DESAIN PENGENDALI PADA MODEL BRUSSELATOR

CONSTRUCTION LYAPUNOV FUNCTION FOR CONTROLLER DESIGN ON MODEL BRUSSELATOR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh
RIZKY RAKHMAWAN
NRP. 1210 100 053

Menyetujui

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si	Dra. Titik Mudjiati, M.Si.
NIP 19660414 199102 2 001	NIP. 19650805 198903 1 001

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FMIPA ITS

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM DEPARTEMEN MATEMATIKA

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya 11 Juli 2017

KONTRUKSI FUNGSI LYAPUNOV UNTUK DESAIN PENGENDALI PADA MODEL BRUSSELATOR

Nama Mahasiswa	:	Rizky Rakhmawan
NRP	:	1210 100 053
Departemen	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si 2. Dra. Titik Mudjiati, M.Si.

Abstrak

Pada umumnya desain pengendali membahas tentang persamaan differensial biasa yang bersifat linear akan tetapi pada prakteknya sistem yang dijumpai kebanyakan berbentuk nonlinear sehingga diperlukan banyak disiplin ilmu dan sejenis ilmu-ilmu terapan untuk mengkontruksikan system tersebut agar nantinya system tersebut stabil. Pada desain ini yang digunakan adalah model Brusselator, dimana kontruksi ini menjelaskan terkait system persamaan kimia pada laju reaksi dengan parameternya berupa pereaksi yang bernilai positif, hal ini berpengaruh terhadap cepat lambatnya laju reaksi yang sedang berlangsung. Pada model ini yang di gunakan berbentuk nonlinear maka akan dilakukan desain pengendali(feedback control) dengan metode Lyapunov. Fungsi Lyapunov yang digunakan ialah fungsi kuadratik, serta hasil yang akan ditampikan yaitu berupa performansi system yang stabil.

Kata Kunci : *nonlinear, Brusselator, Lyapunov kuadratik , Desain feedback control*

CONSTRUCTION LYAPUNOV FUNCTION FOR CONTROLLER DESIGN ON MODEL BRUSSELATOR

Name	:	Rizky Rakhmawan
NRP	:	1210 100 053
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
		2. Dra Titik Mudjiati, M.Si.

Abstract

In general, the design of the controller discusses ordinary differential equations that are linear but in practice the system encountered mostly nonlinear form so it takes a lot of disciplines and similar sciences to mengkontruksikan system in order to later the system is stable. In this design used is model Brusselator, where this construction explain related to system of chemical equation at reaction rate with its parameter of reagent which have positive value, this influence to fast slow rate of reaction that is in progress. In this model that is used in nonlinear form it will be design controller (feedback control) with Lyapunov method. Lyapunov function used is a quadratic function, and the results will be shown in the form of stable system performance.

Keywords: *nonlinear, Brusselator, quadratic Lyapunov, feedback control design*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhaanahu Wa Ta'aala yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul

"KONTRUKSI FUNGSI LYAPUNOV UNTUK DESAIN PENGENDALI PADA MODEL BRUSSELATOR"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT selaku Ketua
2. Departemen Matematika ITS.
3. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani M.Si dan Dra. Titik Mudjiati selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Drs. Komar Baihaqi M.Si dan Bapak Lukman Hanafi M.Sc serta Ibu Soleha S.Si M.Si selaku dosen penguji yang telah memberikan semua saran demi perbaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator tugas akhir dan Mas Ali yang selalu memberikan informasi mengenai tugas akhir.
6. Ibu Dra. Titik Mudjiati selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMIPA ITS.

7. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam tugas akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhir kata, penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat membawa manfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$V(x)$	Fungsi Lyapunov
$\dot{V}(x)$	Turunan Fungsi Lyapunov
$\boldsymbol{P}$	Parameter Kestabilan
$\boldsymbol{F}$	Feedback Kontrol
$-\boldsymbol{Q}$	Matriks Hermitian
$u(t)$	Vektor Kontrol
E_0	Titik Tetap
$x(t_0)$	Titik Kesetimbangan

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang dapat di implementasikan dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan dan ilmu terapan yang diintepretasikan dalam bentuk analitik dan numerik dengan kebanyakan kasus bersifat dinamik, hal ini bisa dibuktikan pada sekitar tahun 1970 [1], sebuah penelitian yang diterapkan pada bentuk nonlinear ditemukan oleh para ahli pemodelan dan kemudian diterapkan untuk model Brusselator pada suatu reaksi kimia. Fenomena reaksi kimia ini memiliki peran penting dalam penguraian stabilitas reaksi pada cabang ilmu terapan yaitu termodinamika, dimana ilmu ini mengkaji tentang perubahan atau perpindahan panas yang ditimbulkan oleh sistem ke lingkungan ataupun sebaliknya, dalam kasus ini sistem dinamik (tidak stabil)[3]. Pengetahuan termodinamika sederhana sangat bermanfaat untuk memutuskan apakah struktur suatu persamaan kimia dalam bentuk persamaan differensial nonlinear ini akan stabil. Karena sistem Termodinamika ini berbentuk dinamik (cenderung berubah) maka sebuah sistem dynamic ini yang akan dikaji dengan istilah fungsi Lyapunov , hal ini dikenal demikian karena variabel-variabel sistem tersebut harus bersifat nonlinear, hal ini dilakukan agar sistem dynamic ini dapat meminimalisir nilai galat(perubahan tidak stabil) dan mencapai kestabilan yang akurat. Sistem ini pertama kali di kenal dan ditemukan oleh Lorenz pada tahun 1963 selanjutnya Penemu bernama Rossler mengembangkan sistem dengan model 3-D pada tahun 1976[2]. Sederhananya model kimia ini menunjukan bahwa stabilitas yang tepat untuk menentukan dinamika yang kompleks adalah model Brusselator, Model ini bisa menyajikan siklus batas serta pengaruh sistem dynamic pada beberapa energi panas yang bekerja pada sistem. Pada tugas akhir ini akan di analisa model Brusselator, dengan acuan jurnal internasional 2015 yang digunakan sebelumnya berjudul Dynamic and Control of Brusselator Chemical Reaction, dan beberapa jurnal yang mendukung berjudul Penggunaan Metode Lyapunov untuk Menguji Kestabilan Sistem Linear [1], dengan tambahan pada sytem ini akan didefinisikan fungsi energi Lyapunov untuk mempelajari stabilitas nonlinier dengan menggunakan metode fungsi energi. Pada keadaan awal sebuah fungsi energi Lyapunov bernilai positif kemudian diturunkan sehingga harus negatif (dengan cara dideferensiasi) agar berkurang nilai energinya sehingga sistem mencapai titik stabil.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana menentukan kontruksi pengendali dengan menggunakan fungsi energi Lyapunov pada model Brusselator agar mencapai sistem yang stabil.

1.3 Batasan Masalah

Pada Tugas Akhir ini dibuat batasan masalah sebagai berikut:

1. Model Brusselator diambil dari literatur berjudul Dynamic of Brusselator**[1]**
2. Pada Sistem ini yang diambil berdimensi dua
3. Desain kontrol yang digunakan adalah state feedback controller

1.4 Tujuan

Pada Tugas Akhir ini dibuat tujuan sebagai berikut:

1. Mengetahui perilaku dinamik model brusselator pada bentuk persamaan reaksi kimia
2. Mendapatkan desain control (feedback controller) pada model Brusselator dengan melalui kontruksi Lyapunov sehingga sistem stabil

1.5 Manfaat

1. Memperoleh metode pengendali yang diterapkan pada masalah desain pengendali lainnya.
2. Mengetahui manfaat fungsi energi Lyapunov pada masalah analisa kstabilan dan desain pengendali sistem.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pembentukan Model

Pada sebuah persamaan reaksi kimia umumnya ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$A + B \rightarrow C + D \tag{2.1}$$

Hal berikut menunjukan bahwa jenis zat A dan B akan bereaksi secara bersamaan membentuk jenis zat C dan D. Dari persamaan reaksi kimia diatas akan mudah untuk menentukan persamaan laju reaksi. Perlu diketahui sebagaian besar persamaan reaksi kimia di asumsikan mengikuti pergerakan massa yang terdapat pada ruas kiri (pereaksi) , yang berarti laju reaksi persamaan kimia berbanding lurus dengan konsentrasi reaktan[2].

$$-[\dot{A}] = -r_a = k[A][B] \tag{2.2}$$

Pada [A] merupakan konsentrasi zat A, r adalah tingkat reaksi, dan k adalah konstanta laju reaksi. r_a adalah dengan konvensi negatif karena A sedang dikonsumsi dalam reaksi. Dengan mekontruksikan hanya satu reaksi hal yang mudah untuk melihat persamaan diferensial yang mengatur konsentrasi masing-masing zat tersebut.

$$-[\dot{A}] = -[\dot{B}] = [\dot{C}] = [\dot{D}] = k[A][B] \tag{2.3}$$

Dengan menambahkan persamaan kimia kedua, akan ditunjukkan sistem yang sedikit lebih kompleks.

$$2A \rightarrow 3E \tag{2.4}$$

Dalam persamaan (4) zat A dan E memiliki koefisien persamaan lebih besar antar zat satu dengan yang lainnya, sehingga persamaan diferensial untuk setiap zat sekarang adalah :

$$-[\dot{B}] = [\dot{C}] = [\dot{D}] = k[A][B]$$

$$[\dot{A}] = -k_3[A][B] - 2k_6[A]^2$$

$$[\dot{E}] = 3k_6[A]^2 \tag{2.5}$$

Perhatikan bahwa laju reaksi diatas menunjukan berapa banyak n kali waktu reaksi terjadi yang bergantung pada nilai konsentrasi dan volume zat tertentu [2], sedangkan koefisien persamaan reaksi tersebut memberitahu berapa banyak molekul dari zat yang dihasilkan atau diproduksi di setiap reaksi yang terjadi.

Akan diperoleh mekanisme laju reaksi pada model Brusselator :

$$A \xrightarrow{k_1} X \qquad 2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X$$

$$B + X \xrightarrow{k_2} Y + C \qquad X \xrightarrow{k_4} D \tag{2.6}$$

Akan ditunjukan untuk A , B , C , D , X , $dan\ Y$ adalah sebuah konsentrasi yang masing-masingnya $[A], [B], [C], [D], [X], dan\ [Y]$ sehingga didapatkan persamaan laju reaksi pada masing-masing persamaanya adalah sebagai berikut :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]$$

$$\frac{d[B]}{dt} = -k_2[B][X]$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_2[B][X]$$

$$\frac{d[D]}{dt} = k_4[X] \qquad (2.7)$$

Dari beberapa persamaan diatas dapat ditentukan laju reaksi untuk konsentrasi $[X], dan\ [Y]$ adalah berikut

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] - k_2[B][X] + k_3[X]^2[Y] - k_4[X]$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2[B][X] - k_3[X]^2[Y] \qquad (2.8)$$

Dengan $k_j(j = 1,2,3,4)$merupakan konstanta satuan serta untuk konsentrasi $[A] = a$ dan $[B] = b$ dimana $,b > 0$ [1], maka persamaan differensial biasa pada model brusselator ini didapatkan

$$\frac{d[X]}{dt} = a - b[X] + [X]^2[Y] - [X]$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = b[X] - [X]^2[Y] \tag{2.9}$$

untuk menyederhanakan persamaan diatas akan didefinisikan untuk $[X] = x$; $\frac{d[X]}{dt} = \dot{x}$ dan untuk $[Y] = y$; $\frac{d[Y]}{dt} = \dot{y}$ maka didapatkan persamaan umum model brusselator berikut

$$\dot{x} = a - (b + 1)x + x^2y$$

$$\dot{y} = bx - x^2y \tag{2.10}$$

2.2. Kesetimbangan atau Kestabilan Sistem

2.2.1. Titik kesetimbangan dan kestabilan nonlinear

Didefinisikan bentuk persamaan differensial nonlinier ialah sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.11}$$

Dimana f adalah suatu fungsi pemetaan di $R^n \; X \; R^m \rightarrow R^n$, terdapat sebuah titik $\bar{x} \in R^n$ sehingga $\bar{x}$ disebut titik equilibrium , jika terdapat $\bar{u} \in R^m$ (equilibrium input) sehingga

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{0} \tag{2.12}$$

Misalkan $\bar{x}$ adalah titik equilibrium (dengan $\bar{u}$ adalah equilibrium input) dengan meninjau ulang pada PD dari kondisi awal $x(t_0) = \bar{x}$ serta menerapkan bentuk input $u(t) = \bar{u}$ untuk semua $t \geq t_0$,berakibat solusi yg dihasilkan $x(t)$ memenuhi

$$x(t) = \bar{x} \quad (2.13)$$

untuk semua $t \geq t_0$ disebut titik equilibrium.

2.2.2. Teknik Linearisasi

Sebagian besar persamaan diferensial yang menarik adalah non-linear karena pada beberapa pengecualian tidak dapat diselesaikan secara analisis (eksak) , melainkan dengan menggunakan pendekatan komputasi.

Akan dikenal bentuk orde sederhana dari sistem nonlinear sebagai berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x, y)$$

$$\dot{y}(t) = g(x, y) \quad (2.14)$$

Akan dilakukan pelinearan terhadap fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dengan menerapkan bentuk input $u(t) = \bar{u}$ sebagai titik equilibrium maka diberikan persamaannya sebagai berikut,

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

$$g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}\,)(x - \bar{x}\,) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}\,)(y - \bar{y}) \quad (2.15)$$

Jika titik equilibrium $(\bar{x}\,, \bar{y}) \neq 0$ maka dengan memilih

$$u = x - \bar{x} \text{ dan } v = y - \bar{y}$$

$$\dot{u} = \dot{x} \text{ dan } \dot{v} = \dot{y} \quad (2.16)$$

maka sistem pelineararannya diperoleh dengan bentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

sehingga didapatkan matriks Jacobian berikut

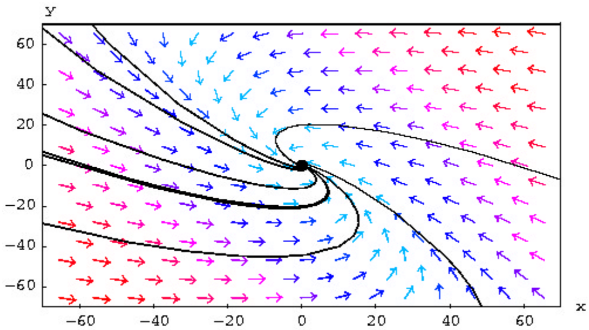
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}\,, \bar{y}\,) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Apabila pada nilai eigen dari matriks Jacobian didapatkan bentuk bilangan kompleks maka persamaan umum sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

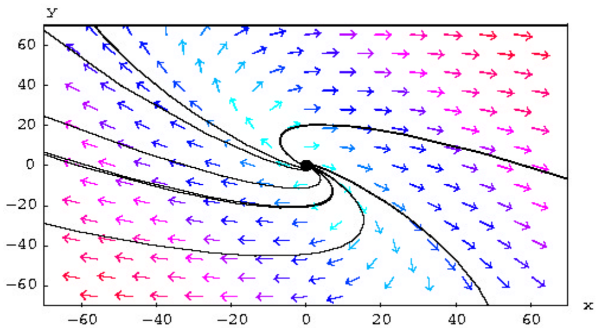
Adapun beberapa sifat yang memenuhi kestabilan dengan menyebutkan nilai α sebagai berikut

1. Jika $\alpha < 0$ untuk limit dari t mendekati tak hingga maka arah dan pergerakan titik mendekati stabil.



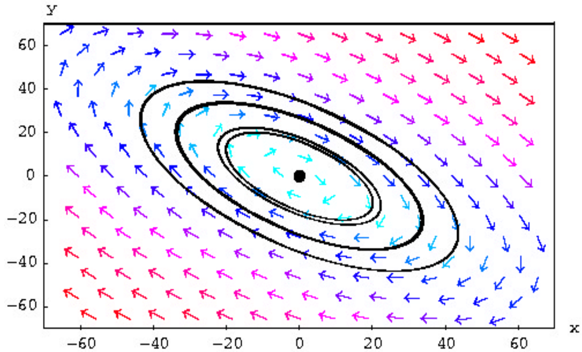
Gmbr 2.1 : Kestabilan untuk α <0

2. Jika $\alpha > 0$ untuk limit dari t mendekati tak hingga maka arah dan pergerakan titik menjauhi stabil.



Gambar 2.2 : Kestabilan untuk α >0

3. Jika $\alpha = 0$ untuk limit dari t mendekati tak hingga maka arah dan pergerakan titik tidak stabil secara linear (siklik).



Gambar 4.3 : Kestabilan untuk α = 0

2.3. Desain Kestabilan Kontrol Secara Umum

2.3.1 Kestabilan sistem kontrol linear

Diberikan sistem kontrol linear sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad x(0) = x_0 \tag{2.20}$$

dimana x = x(t) ∈ R^n menyatakan vektor keadaan , u = u(t) ∈ R^m menyatakan vektor kontrol (*input*), A ∈ $R^{n\times m}$ menyatakan matriks konstan berukuran $n \times n, B \in R^{n\times m}$ menyatakan matriks konstan berukuran $n \times m, t \geq 0$ menyatakan waktu. Jika matriks A dan B bergantung terhadap waktu, maka sistem disebut sistem kontrol linier *varying* waktu. Sebaliknya, jika matriks A dan B tidak bergantung terhadap waktu, maka sistem disebut sistem kontrol linier *invariant* terhadap waktu.

Salah satu kajian dalam sistem kontrol adalah mengenai kestabilan sistem tersebut. Sistem dikatakan stabil jika $t \to \infty$ mengakibatkan $x(t) \to 0$. Selain itu kriteria untuk menentukan kestabilan sistem adalah kriteria nilai eigen. Sistem adalah stabil jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks A adalah negatif. Sebaliknya jika ada bagian rill matriks A yang non negatif maka sistem adalah tidak stabil. Tidak semua sistem kontrol linier bersifat stabil, akan tetapi sistem yang tidak stabil ini masih memungkinkan untuk distabilkan.

Sistem yang tidak stabil dikatakan dapat distabilkan jika terdapat kontrol $u = -Fx$ untuk suatu $F \in R^{n \times m}$sedemikian sehingga sistem loop tertutup $(A - BF)\, x$ adalah stabil, artinya matriks F dipilih sedemikian sehingga bagian riil dari semua nilai eigen matriks $A - BF$ adalah negatif. Matriks F disebut matriks *feedback* dan vektor **u** dikatakan sebuah kontrol yang menstabilkan sistem**[6]**.

Persoalan menjadi menarik jika nilai eigen dari matriks $A - BF$ dapat diatur sesuai keinginan. Berdasarkan uraian diatas, Maka dalam kontruksi ini akan dikaji bagaimana syarat yang menjamin eksistensi matriks F sedemikian sehingga sistem $\dot{x} = (A - BF)\, x$ adalah stabil, tetapi nilai eigen dari matriks $A - BF$ dapat diatur sesuai keinginan. Permasalahan seperti ini disebut sebagai masalah penempatan nilai eigen.

2.3.2 Kestabilan Lyapunov

Beberapa definisi kestabilan yang berkaitan dengan teorema Lyapunov, bisa ditinjau berdasarkan suatu sistem yang didefinisikan dengan keadaan setimbang.

Definisi 2.1 [3]:

- *Sistem dinyatakan berada pada kondisi kesteimbangan berada pada keadaan x_e dengan $f(x_e\ ,t)= 0$ untuk semua t*
- *Sistem dalam keadaan kestimbangan, jika sistem ini linier dan tidak berubah terhadap waktu.*
- *Untuk $f(x,t) = Ax$, maka terdapat hanya satu keadaan setimbang pada saat A adalah nonsingular. Jika A singular maka akan didapat kondisi kesetimbangan yang tak berhingga.*

Berdasarkan tiga poin diatas akan di rumuskan dalam bentuk norma Euclid dengan pemisalan jika sebuah bola dengan jari-jari k terhadap kondisi kestimbangan x_e didapatkan bentuk sebagai berikut

$$\|x - x_e\| \leq k$$

Apabila terdapat $S(\varepsilon)$yang terdiri pada setiap titik , berakibat :

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

Sehingga hubungan k terhadap $S(\varepsilon)$ untuk semua $t \geq t_0$

$$\|x - x_e\| \leq \boldsymbol{\delta}$$

Dengan kata lain didapatkan bentuk kstabilannya

$$\|f(x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon \tag{2.21}$$

***Definisi 2.2*[3]:**

1. **A** dikatakan definit positif, jika $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
2. **A** dikatakan definit negatif, jika $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$, untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
3. **A** dikatakan semi definit positif, jika $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, untuk $\mathbf{x} \in R^{n\,(*)}$
4. **A** dikatakan semi definit negatif, jika $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$,

   untuk $\mathbf{x} \in R^{n\,(*)}$ **(*)** dapat terjadi bila $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Definisi 2.3 *:*

1. **A** definit posisif jika semua nilai karakteristiknya positif.
2. **A** definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif.
3. **A** semi definit posisif jika semua nilai karakteristiknya positif dan ada yang bernilai nol.
4. **A** semi definit negatif jika semua nilai karakteristiknya negatif dan ada yang bernilai nol.

Fungsi Lyapunov V(**x**) merupakan fungsi skalar yang *definit positif* (bernilai positif) di daerah Ω bila V(**x**) untuk semua kondisi yang tidak nol **x** di daerah Ω dan juga harus memenuhi V(0) = 0. Sedangkan untuk fungsi Lyapunov yang bergantung pada waktu V(**x,**t) adalah *definit positif* didaerah Ω [4] , jika fungsi itu dibatasi dari bawah oleh fungsi definit positif yang tidak berubah terhadap waktu.

Diberikan bentuk kuadratik Lyapunov sebagai penunjang desain kestabilan kontrol

$$V(x) = x^T \boldsymbol{P} x \tag{2.21}$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T \boldsymbol{P} x + x^T \boldsymbol{P} \dot{x} + x^T \dot{\boldsymbol{P}} x$$

Dengan nilai parameter $\boldsymbol{P}$ adalah matriks konstan definit positif maka

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T \boldsymbol{P} x + x^T \boldsymbol{P} \dot{x} \tag{2.22}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Tahapan Penelitian

Dalam pengerjaan tugas akhir ini terdapat beberapa tahapan, yaitu:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini akan dipelajari dasar-dasar teori yang digunakan dalam pengkajian persamaan differensial biasa dalam bentuk nonlinear dengan menentukan titik tetapnya guna mendapatkan matriks jacobian yang memenuhi kestabilan, dalam kasus ini nilai eigennya berbentuk kompleks sehingga ada 3 kemungkinan untuk Real daripada eigen kompleksnya bernilai lebih besar, lebih kecil atau sama dengan nol .(Matriks Jacobi, eigen value, complex eigen value, real eigen value ,stability).

2. Pembentukan Model

Mengkontruksikan persamaan laju reaksi pada model Brusselator dengan penurunan reaksi ke persamaan differensial biasa.

3. Analisis Kestabilan

Pada analisa kestabilan ini akan dibagi menjadi dua diantaranya:

a. Analisis Kestabilan Lokal

- Nilai titik tetap kestabilan

- Teknik Pelinearisasi
- Nilai Eigen

b. Analisis Kestabilan Linear
   - Pole Placement
   - Lyapunov

4. Desain Kontrol

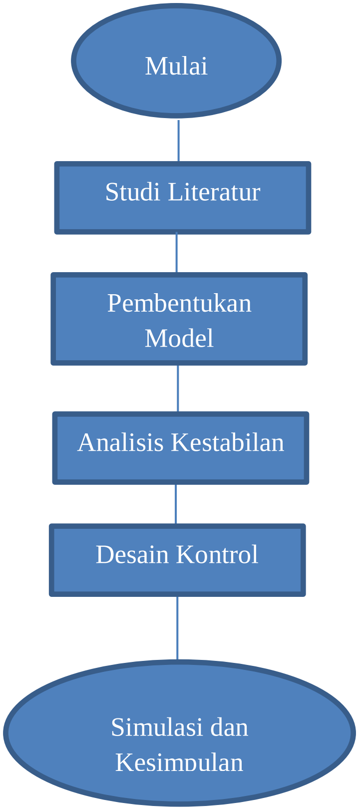
a. Sistem yang dilinearkan menggunakan metode Pole Placement.

b. Sistem non linear dikontruksi dengan menggunakan kontruksi Lyapunov Kudratik.

5. Simulasi

Pada simulasi ini akan diperlihatkan performansi sistem Brusselator yang telah dilakukan desain kontrol berupa fungsi Lyapunov , simulasi model dengan menggunakan software MATLAB versi (R2009a), dengan fitur ODE 45.

3.2 Diagram Alur



Gambar 3.1 : Alur Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1. Analisa Kestabilan Lokal

4.1.1. Titik Tetap Kestabilan

Didapatkan Persamaan Differensial Biasa untuk mendisikripsikan model Brusselator pada Reaksi Kimia sebagai berikut :

$$\frac{d[X]}{dt} = a + [X]^2[Y] - (b+1)[X]$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = b[X] - [X]^2[Y] \tag{4.1}$$

Dengan memisalkan [X] = x dan [Y] = y maka model Brusselator akan disajikan lebih sederhana dalam bentuk berikut

$$\dot{x} = a + x^2y - (b+1)x$$

$$\dot{y} = bx - x^2y \tag{4.2}$$

Akan dikenal bentuk orde sederhana dari sistem nonlinear sebagai berikut,

$$\dot{x} = f(x, y, u)$$

$$\dot{y} = g(x, y, u)$$

Dengan mensubtitusikan kedua persamaan diatas maka,

$$f(x, y, u) = a + x^2y - (b + 1)x$$

$$g(x, y, u) = bx - x^2y \tag{4.3}$$

Akan ditentukan titik tetap (x,y) yang memenuhi

Jika $\dot{x} = 0$ maka $f(x, y, u) = 0$

Jika $\dot{y} = 0$ maka $g(x, y, u) = 0$

Akibatnya

$$a + x^2y - (b + 1)x = 0 \text{ dan}$$

$$bx - x^2y = 0 \tag{4.4}$$

Untuk persamaan $bx - x^2y = 0$ akan didapatkan akar-akar pada bentuk $x(b - xy) = 0$ dengan $x = 0$ atau $(b - xy) = 0$

Apabila $x = 0$ akibat dari persamaan pada (4.4) menjadi

$$a + (0)^2y - (b + 1)(0) = 0 \text{ , maka } a = 0$$

Hal ini kontradiksi karena $a \neq 0$ merupakan input sedemikian sehingga haruslah $(b - xy) = 0$ maka $xy = b$,dengan mesubtitusikan nilai pada persamaan berakibat

$(b - xy) = 0 \leftrightarrow xy = b$ dengan $y \neq 0$

Subtitusi ke persamaan (4.4)

$$a + x(xy) - (b + 1)x = 0$$

$a + x(b) - (b + 1)x = 0$ maka $x = a\ dan\ y = \frac{b}{a}$

Akibatnya akan diperoleh titik tetap $E_0(x_0 y_0) = (a, \frac{b}{a})$ (4.5)

4.1.2 Liniearisasi Model

Ketika $E_0(x_0 y_0)$ adalah titik tetap , dengan karena sistem pada (4.4) tak linear maka perlu dilinearkan dengan bentuk sebagai berikut

$$f(x, y, u) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, u)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, u)y$$

$$g(x, y, u) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, u)x + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, u)y \qquad (4.6)$$

Dengan bentuk matriksnya

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, u) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, u) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, u) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Didapatkan bentuk sistem linearnya pada persamaan diatas , maka akan diperoleh bentuk matriks Jacobiannya sebagai berikut

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,u) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,u) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,u) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,u) \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 2xy - (b+1) & x^2 \\ b - 2xy & x^2 \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

Untuk titik tetap $E_0(x_0 y_0) = (a, \frac{b}{a})$ berlaku

$$J_0 = J(E_0) = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

Dengan memperoleh analisa kestabilan linear akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian dengan bentuk | $\lambda I - J_0$ | = 0 maka

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - b + 1 & -a^2 \\ b & \lambda + a^2 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga nilai eigennya

$$\lambda^2 + (a^2 - b + 1)\lambda + a^2 = 0 \qquad (4.9)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(a^2 - b + 1\right) \pm \sqrt{(a^2 - b + 1)^2 - 4(1)a^2}}{2(1)} \tag{4.10}$$

4.1.3 Analisa Performansi Kestabilan

Selanjutnya akan dikaji beberapa kasus

a. Jika $(a^2 - b + 1) > 0$ atau $b < a^2 + 1$ maka $E_0(x_0 y_0)$ $Re_{\lambda_{1,2}} < 0$ sehingga sistem stabil.
b. Jika $(a^2 - b + 1) < 0$ atau $b > a^2 + 1$ maka $E_0(x_0 y_0)$ $Re_{\lambda_{1,2}} > 0$ sehingga sistem tidak stabil.
c. Jika $(a^2 - b + 1) = 0$ atau $b = a^2 + 1$ maka $E_0(x_0 y_0)$ $Re_{\lambda_{1,2}} < 0$ sehingga sistem .tidak stabil linear (siklik).

4.1.3.1 Implementasi Performansi Kestabilan Menggunakan Matlab

Pendefinisian pada simulasi model Brusselator dapat di interpretasikan dalam bentuk MATLAB yaitu sebagai berikut

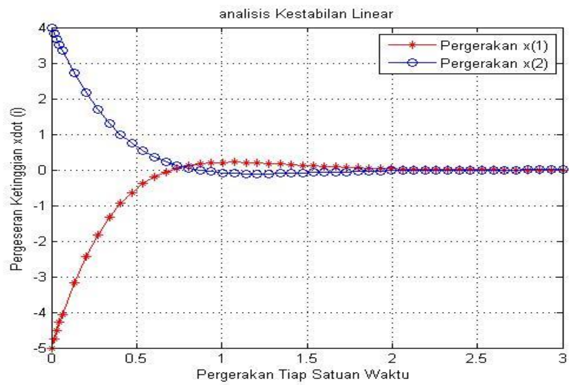
a. Jika $(a^2 - b + 1) > 0$ atau $b < a^2 + 1$ akan dipilih $b = 5\ dan\ a = 3$ agar memenuhi persamaan didapatkan titik tetapnya $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(3, \frac{5}{3}\right)$ serta dipilih titik awal yang diambil di persekitaran titik tetapnya ialah $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (-4{,}5)$, sehingga didapatkan nilai eigen dengan diberikan persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a^2-b+1) \pm \sqrt{(a^2-b+1)^2-4(1)a^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(3^2-5+1) \pm \sqrt{(3^2-5+1)^2-4(1)3^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{23}i}{2} \tag{4.11}$$

Dari kesimpulan diatas didapat untuk $(a^2 - b + 1) > 0$ beraikbat $Re_{\lambda_{1,2}} < 0$ serta didapatkan juga bentuk plot dari analisis Kstabilan Linear berikut ialah



Gambar 4.1 : Pergerakan Kestabilan $(a^2 - b + 1) > 0$

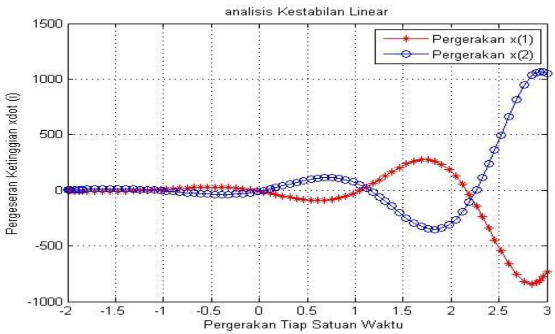
b. Jika $(a^2 - b + 1) < 0$ atau $b > a^2 + 1$ dipilih $b = 12$ dan $a = 3$ agar memenuhi persamaan titik tetapnya $(\bar{x}, \bar{y}) = (3,4)$ serta dipilih titik awal yang diambil di persekitaran titik tetapnya ialah $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (-4{,}5)$, sehingga didapatkan nilai eigen dengan diberikan persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a^2-b+1) \pm \sqrt{(a^2-b+1)^2-4(1)a^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(3^2-12+1) \pm \sqrt{(3^2-12+1)^2-4(1)3^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{-44}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{44}i}{2} \tag{4.12}$$

Dari kesimpulan diatas didapat untuk $(a^2 - b + 1) < 0$ beraikbat $Re_{\lambda_{1,2}} > 0$ serta didapatkan juga bentuk plot dari analisis Kstabilan Linear berikut ialah



Gambar 4.2 : Pergerakan Kestabilan $(a^2 - b + 1) < 0$

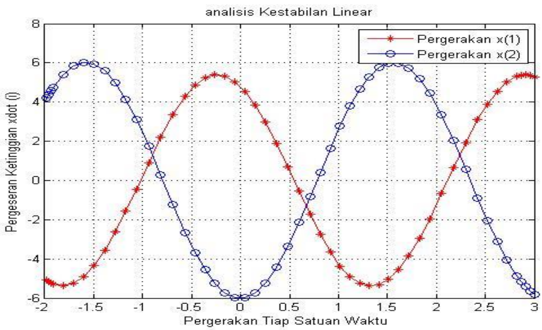
c. Jika $(a^2 - b + 1) < 0$ atau $b > a^2 + 1$ akan dipilih $b = 5\ dan\ a = 2$ agar memenuhi persamaan titik tetapnya $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ serta dipilih titik awal yang diambil di persekitaran titik tetapnya ialah $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (-4{,}5)$, sehingga didapatkan nilai eigen dengan diberikan persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a^2-b+1) \pm \sqrt{(a^2-b+1)^2 - 4(1)a^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(2^2-5+1) \pm \sqrt{(2^2-5+1)^2 - 4(1)2^2}}{2(1)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i \qquad (4.13)$$

Dari kesimpulan sebelumnya didapat untuk $(a^2 - b + 1) = 0$ beraikbat $Re_{\lambda_{1,2}} = 0$ serta didapatkan juga bentuk plot dari analisis Kstabilan Linear berikut ialah



Gambar 4.3 : Pergerakan Kestabilan $(a^2 - b + 1) = 0$

Dari ketiga analisis kstabilan linear didapatkan bahwa untuk

- $Re_{\lambda_{1,2}} < 0$ pergerakan titik tetap menuju stabil(stabil)
- $Re_{\lambda_{1,2}} > 0$ pergerakan titik tetap keluar/jauh dari stabil(tidak stabil)
- $Re_{\lambda_{1,2}} = 0$ pergerakan titik tetap berosilasi tertutup secara periodik (siklik/tidak stabil)

4.2. Desain Kontrol

4.2.1. Analisis Kestabilan Sistem Linear

Selanutnya akan dilakukan analisa kestabilan dengan metode Lyapunov , bila sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk : $\dot{x} = Ax$

$$\dot{x} = a + x^2y - (b+1)x$$

$$\dot{y} = bx - x^2y \tag{4.14}$$

diasumsikan $\dot{x} = \dot{x_1}$; dan $\dot{y} = \dot{x_2}$

maka bentuk matriksnya adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a \tag{4.15}$$

Dengan didapatkan bentuk matriks A pada (4.6) adalah

$$A = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Untuk titik tetap $E_0(x_0 y_0) = (a, \frac{b}{a})$ pada (4.7) berlaku

$$A = \begin{bmatrix} -(b+1) & a^2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Dipilih suatu fungsi Lyapunov pada (2.7) $V(x) = x^T \boldsymbol{P} x$ dimana **P** adalah matriks parameter didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Dengan matriks P berdefinit positif berakibat

$$P_{11} > 0$$

$$P_{11}P_{22} - {P_{12}}^2 > 0 \quad (4.19)$$

-Turunan dari fungsi Lyapunov dinyatakan :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T \boldsymbol{P} x + x^T \boldsymbol{P} \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T \boldsymbol{P} x + x^T \boldsymbol{P}(Ax)$$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} A) x \quad (4.20)$$

Syarat perlu dan syarat cukup agar keadaan setimbang untuk x = 0 stabil asimtotik global adalah jika diberikan setiap matriks Hermitian definit positif (simetri) $-\boldsymbol{Q}$, maka terdapat suatu matriks Hermitian definit positif (simetri) P sedemikian rupa sehingga :

$$(A^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} A) = -\boldsymbol{Q} \quad (4.21)$$

Berakibat bentuk matriks – Q adalah

$$-\boldsymbol{Q} = \left[\begin{bmatrix} -(b+1) & b \\ a^2 & -a^2 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -(b+1) & a^2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}\right] \quad (4.22)$$

Dengan mengingat matriks Q definit positif maka akan dibuktikan bahwa untuk matriks $(A^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}A) = -\boldsymbol{Q}$ definit negatif yang berakibat $\dot{V}(x)$ juga negatif.

Akan diberikan bentuk solusi dari matriks $-\boldsymbol{Q}$ sebagai berikut

$$-\boldsymbol{Q} = \left[\begin{bmatrix} -(b+1) & b \\ a^2 & -a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -(b+1) & a^2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}\right]$$

$$-\boldsymbol{Q} = \left[\begin{bmatrix} -(b+1)P_{11} + bP_{12} & -(b+1)P_{12} + bP_{22} \\ a^2P_{11} - a^2P_{12} & a^2P_{12} - a^2P_{22} \end{bmatrix}\right.$$
$$\left. + P\begin{bmatrix} -(b+1)P_{11} + bP_{12} & a^2P_{11} - a^2P_{12} \\ -(b+1)P_{12} + bP_{22} & a^2P_{12} - a^2P_{22} \end{bmatrix}\right]$$

$$-\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -2(b+1)P_{11} + 2bP_{12} & a^2P_{11} - (a^2+b+1)P_{12} + bP_{22} \\ a^2P_{11} - (a^2+b+1)P_{12} + bP_{22} & 2a^2P_{12} - 2a^2P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(b+1)P_{11} + 2bP_{12} & a^2P_{11} - (a^2+b+1)P_{12} + bP_{22} \\ a^2P_{11} - (a^2+b+1)P_{12} + bP_{22} & 2a^2P_{12} - 2a^2P_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan turunan daripada fungsi Lyapunov adalah sebagai berikut

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}A)x$$

$$\dot{V}(x) = x^T(-\boldsymbol{Q})x \quad (4.23)$$

Maka bentuk matriks dari $\dot{V}$adalah

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} = q_{11}x^2 + 2q_{12}xy + q_{22}y^2 \quad (4.24)$$

Berdasarkan sifat Lyapunov bentuk kuadratik berakibat

- $q_{11} = -2(b+1)P_{11} + 2bP_{12} < 0$
- $q_{12} = a^2P_{11} - (a^2 + b + 1)P_{12} + bP_{22} = 0$
- $q_{22} = 2a^2P_{12} - 2a^2P_{22} < 0$ (4.25)

Agar memenuhi matriks **P** definit positif dipilih $P_{12} = 0$

Pada P_{11} berlaku

$$-2(b+1)P_{11} < 0 \text{ maka } P_{11} > 0$$

$$2(b+1) > 0 \text{ maka } b > -1$$

Pada P_{22} berlaku

$$-2a^2P_{22} < 0 \; maka \; P_{22} > 0$$

$$2a^2 > 0 \; maka \; a > 0 \quad (4.26)$$

sehingga $P_{11} > 0$ dan $P_{22} > 0$,berdasarkan hal demikian Q(x) definit negatif , dengan demikian sistem PD stabil asimtotik.

Akan di uji apakah benar untuk Q(x) definit negatif dengan diasumsikan ada nilai parameter yang memenuhi $P_{11} > 0$ dan $P_{22} > 0$ agar parameter P definit positif.

Jika diberikan $P_{11} = 3$ dan $P_{22} = 4$ maka bentuk persamaan Lyapunov nya (2.7) adalah sebagai berikut

$$V(x) = x^T \boldsymbol{P} x$$

$$V(x) = [x \quad y] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Sehingga persamaan Lyapunov didapatkan

$$V(x) = 3x^2 + 4y^2$$

4.2.1.1. Implementasi Nilai Parameter Menggunakan Matlab

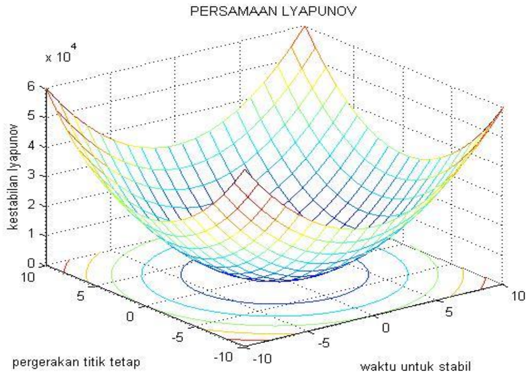
Akibatnya didapatkan persamaan Lyapunov dengan parameter dalam bentuk kuadratik yang definit positif, dengan dituliskan kembali pada (4.27) diberikan secara umum berikut

$$V(x) = x^T [\boldsymbol{P}] x$$

$$V(x) = [x \quad y] \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$V(x) = P_{11} x^2 + P_{22} y^2$$

$$P_{11} > 0 \; dan \; P_{22} > 0$$



Gambar 4.4 :Kontruksi Persamaan Lyapunov

Serta diberikan bentuk turunan fungsi Lyapunov sebagai berikut

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial y}\dot{y}$$

$$\dot{V}(x) = 6x(-(b+1)x + a^2y) + 8y(bx - a^2y)$$

$$\dot{V}(x) = -6(b+1)x^2 + 6a^2xy + 8bxy - 8a^2y^2 \quad (4.17)$$

Berdasarkan sifat turunan pada (4.13) fungsi Lyapunov$\dot{V}(x) = x^T(-\boldsymbol{Q})x$ maka akan didapatkan matriks dari $[\dot{V}(x)]$ adalah sebagai berikut

$$\left[\dot{V}(x)\right] = [x \quad y]\begin{bmatrix} -6(b+1) & 6a^2 + 8b \\ 0 & -8a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Serta memenuhi untuk matriks $-\boldsymbol{Q}$ adalah

$$-\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -6(b+1) & 6a^2+8b \\ 0 & -8a^2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Berdasarkan penjelasan sebelumnya untuk Q(x) definit negatif maka

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6(b+1) & 6a^2+8b \\ 0 & -8a^2 \end{bmatrix}$$

Ambil untuk $q_{12} = 0$ berakibat $\boldsymbol{6a^2} + \boldsymbol{8b} = \boldsymbol{0}$ sehingga dipilih nilai $b = -3\ dan\ \ a = 2$ akan memenuhi bentuk matriks $-\boldsymbol{Q}$ sebagai berikut

$$-\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -6(-3+1) & 6(2)^2+8(-3) \\ 0 & -8(2)^2 \end{bmatrix}$$

Maka kesimpulannya benar untuk setiap $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ definit negatif ada $q_{11} < 0$ atau $q_{22} < 0$. ◄

4.2.1.2 Implementasi Simulasi Fungsi Turunan Lyapunov Menggunakan Matlab

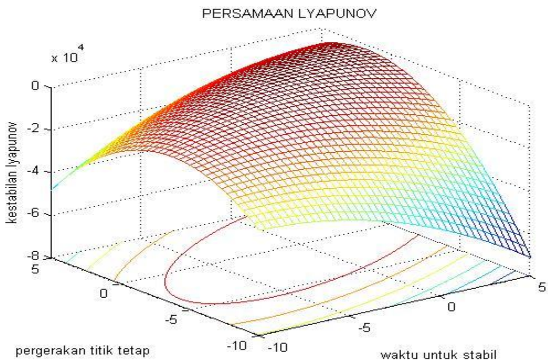
a. Adapun didapatkan bentuk turunan dari fungsi Lyapunov dengan syarat agar sistem stabil apabila untuk $\dot{V}(x,y) < 0$ akan diberikan secara umum dalam bentuk

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T P x + x^T P (Ax)$$

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x$$

$$\dot{V}(x) = x^T(-Q)x \;\; dengan\; Q(x) definit\; negatif$$



Gambar 4.5 Turunan Persamaan Lyapunov

4.2.2. Bentuk Feedback Kontrol pada Model Brusselator

4.2.2.1 Desain Feedback Kontrol dengan Metode Pole Placement

Diberikan sistem kontrol linear (2.5) sebagai berikut :

$\dot{x} = Ax + Bu\,,\; (output)\quad x(0) = x_0$ dengan $u = -\boldsymbol{F}x$ dan B matriks bersesuaian$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

Dengan A didapatkan dari model brusselator sebagai berikut

$$\dot{x} = a + x^2y - (b+1)x$$

$$\dot{y} = \; bx - x^2y$$

diasumsikan $\dot{x} = \dot{x}_1$; dan $\dot{y} = \dot{x}_2$

maka bentuk matriksnya (4.9) adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a$$

Dengan didapatkan bentuk matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan sistem kontrol $\dot{x} = Ax + Bu$ berakibat

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (4.19)$$

Dengan bentuk matriks $u = -\boldsymbol{F}x$ adalah

$$u = -[f_1 \quad f_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \; -f_1x_1 - f_2x_2 \qquad (4.20)$$

Maka didapatkan sistem kontrol input berupa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(-[f_1 \quad f_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$$

Dengan menyederhanakannya didapatkan

$$\dot{x} = Ax - B\boldsymbol{F}x = \begin{bmatrix} -(b+1) & x^2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Berakibat

$$\dot{x} = (A - B\boldsymbol{F})x = \begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & x^2 - f_2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (4.21)$$

Agar sistem stabil ditentukan nilai eigen dari $(A - B\boldsymbol{F})$ adalah sebagai berikut

$$\det|A - B\boldsymbol{F}| = 0$$

$$\det \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & x^2 - f_2 \\ b & -x^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$det \begin{vmatrix} \lambda + (b + 1 + f_1) & -x^2 + f_2 \\ -b & \lambda + x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya

$$\lambda^2 + (b + 1 + f_1 + x^2)\lambda + x^2 + x^2 f_1 + b f_2 = 0 \qquad (4.22)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(b+1+f_1+x^2) \pm \sqrt{(b+1+f_1+x^2)^2 - 4(x^2 + x^2 f_1 + b f_2)}}{2(1)}$$

Akan ditentukan $f_1$dan f_2 sehingga sistem stabil jika nilai eigen $Re\ \lambda_{1,2(A-BF)} < 0$

Dengan menginputkan titik tetap $E_0(x_0 y_0) = \left(a, \frac{b}{a}\right)$, berakibat

$$\lambda^2 + (b + 1 + f_1 + a^2)\lambda + \ a^2 + a^2 f_1 + b f_2 = 0$$

Dengan memisalkan $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$ (syarat dari nilai $Re\ \lambda_{1,2(A-BF)} < 0)$, sehingga

$$\lambda^2 + 3\lambda + \ 2 = 0$$

Dengan demikian didapatkan nilai dari feedback **F** adalah

$$f_1 = 2 - (b + a^2)$$

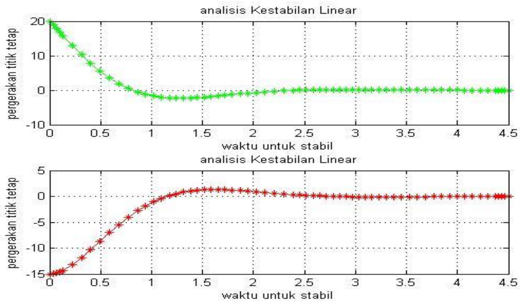
$$f_2 = \frac{2-a^2(2-(b+a^2))}{b} \qquad (4.23)$$

Pada analisis kestabilan sistem linear yang telah di jelaskan pada bab sebelumnya didapatkan $b = -3$ dan $a = 2$ berakibat nilai dari $f_1 = 1$ dan $f_2 = \frac{2}{3}$

Pada desain control dengan metode Pole Placement diberikan sebuah sistem sebagai berikut $\dot{x} = Ax + Bu$, $(output)$ $x(0) = x_0$ dipilih $u = -Fx$ dengan B matriks bersesuaian$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ Maka matriks dari $(A - BF)$ yang didapatkan pada (4.23) pembahasan sebelumnya dengan $f_1 = 1\ dan\ f_2 = \frac{2}{3}$ dinyatakan dalam bentuk berikut

$$(A - BF) = \begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & a^2 - f_2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}$$

$$dengan\ b = \frac{3}{4}a^2 sehigga\ dipilih\ \ b = -3; a = 2$$



Gambar 4.6 : Kontrol Feedback dengan metode Pole Placement

4.2.2.2 Desain Feedback Kontrol Pada Lyapunov Kuadratik

- Pada desain kontrol berikut akan diberikan sistem kontrol linear (2.5) sebagai berikut :
  $\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ (output)\quad x(0) = x_0$ dengan $u = -\boldsymbol{F}x$ dan B matriks bersesuaian$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Desain feedback kontrol yang akan didapat dengan metode Lyapunov**[6]** , bila sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk : $\dot{x} = (A - B\boldsymbol{F})x$
- Dengan bentuk matriks BF sebagai berikut

$$B\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Sehingga didapatkan $(A - BF)$ sebagai berikut

$$(A - B\boldsymbol{F}) = \begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & a^2 - f_2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Dipilih suatu fungsi Lyapunov sebagai berikut $V(x) = x^T P x$ dimana **P** adalah matriks parameter (4.10) didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan matriks P berdefinit positif (4.11) berakibat

$$P_{11} > 0$$

$$P_{11}P_{22} - {P_{12}}^2 > 0$$

-Turunan dari fungsi Lyapunov dinyatakan :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \boldsymbol{P} x + x^T \boldsymbol{P} \dot{x}$$

$$\dot{V} = ((A - B\boldsymbol{F})x)^T P x + x^T \boldsymbol{P}((A - B\boldsymbol{F})x)$$

$$\dot{V} = x^T((A - B\boldsymbol{F})^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(A - B\boldsymbol{F}))x \tag{4.26}$$

Syarat perlu dan syarat cukup agar keadaan setimbang untuk x = 0 stabil asimtotik global adalah jika diberikan setiap matriks

Hermitian definit positif (simetri) $-\boldsymbol{Q}$, maka terdapat suatu matriks Hermitian definit positif (simetri) **P** sedemikian rupa sehingga :

$$((A - B\boldsymbol{F})^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(A - B\boldsymbol{F})) = -\boldsymbol{Q}$$

Berakibat bentuk matriks $-\boldsymbol{Q}$ adalah

$$-\boldsymbol{Q} = \left[\begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & b \\ a^2 - f_2 & -a^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & a^2 - f_2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}\right]$$

Dengan mengingat matriks Q definit positif maka akan dibuktikan bahwa untuk matriks $((A - B\boldsymbol{F})^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(A - B\boldsymbol{F})) = -\boldsymbol{Q}$ berdefinit negatif yang berakibat $\dot{V}(x)$ juga berdefinit negative **[5]**.

Akan diberikan bentuk solusi dari matriks $-\boldsymbol{Q}$**,** sebagai berikut

$$-\boldsymbol{Q} = \left[\begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & b \\ a^2 - f_2 & -a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & a^2 - f_2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}\right]$$

$$-\boldsymbol{Q} =$$

$$\left[\begin{bmatrix} (-(b+1)-f_1)P_{11}+bP_{12} & (-(b+1)-f_1)P_{12}+bP_{22} \\ (a^2-f_2)P_{11}-a^2P_{12} & (a^2-f_2)P_{12}-a^2P_{22} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} (-(b+1)-f_1)P_{11}+bP_{12} & (a^2-f_2)P_{11}-a^2P_{12} \\ (-(b+1)-f_1)P_{12}+bP_{22} & (a^2-f_2)P_{12}-a^2P_{22} \end{bmatrix} \right] \qquad (4.27)$$

Dengan matriks yang bersesuaian untuk **–Q** pada (4.13) adalah

$$-\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan turunan daripada fungsi Lyapunov adalah sebagai berikut

$$\dot{V} = x^T((A-B\boldsymbol{F})^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(A-B\boldsymbol{F}))x$$

$$\dot{V} = x^T - \boldsymbol{Q}x$$

Maka bentuk matriks dari $\dot{V}$(4.14) adalah

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{11} & \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} = \overline{q_{11}}x^2 + 2\overline{q_{12}}xy + \overline{q_{22}}y^2$$

Berdasarkan sifat Lyapunov bentuk kuadratik berakibat

- $\bar{q}_{11} = (-2(b+1)-2f_1)P_{11} + 2bP_{12} < 0$
- $\bar{q}_{12} = (a^2-f_2)P_{11} - \left((a^2+b+1)+f_1\right)P_{12} + bP_{22} = 0$
- $\bar{q}_{22} = 2(a^2-f_2)P_{12} - 2a^2P_{22} < 0$ (4.28)

Agar memenuhi matriks P definit positif dipilih $P_{12} = 0$ maka $P_{11} > 0$ dan $P_{22} > 0$

Jika nilai $P_{11} > 0$ maka untuk nilai f_1 berakibat

$$-2(b+1) - 2f_1 < 0$$
$$2(b+1) + 2f_1 > 0$$
$$f_1 > -2(b+1) \tag{4.29}$$

Dan jika untuk $P_{12} = 0$ maka berlaku juga untuk nilai f_1 yaitu

$$-(a^2 + b + 1) - f_1 < 0$$
$$f_1 > -(a^2 + b + 1)$$

Jika berlaku untuk $P_{11} > 0$ dan $P_{12} = 0$ berakibat untuk nilai f_2 adalah

$$a^2 - f_2 \leq 0$$
$$f_2 \leq a^2 \tag{4.30}$$

berdasarkan hal demikian Q(x) definit negatif , dengan demikian untuk desain feedback kontrol pada metode Lyapunov kuadratik sistem PD juga stabil asimtotik

Ketika didapatkan nilai dari feedback kontrol f_1 dan f_2 , akan diuji apakah tetap berlaku untuk Q(x) definit negatif, dengan asumsi dipilih $P_{12} = 0$ maka nilai parameter yang berlaku $P_{11} > 0$ dan $P_{22} > 0$ agar $[P]$ definit positif.

Diasumsikan matriks $-\boldsymbol{Q}$ adalah matriks skalar dengan syarat $q_{11} < 0$ dan $q_{22} < 0$ agar $-\boldsymbol{Q}$ definit negatif . Pada pembahasan analisis kestabilan sebelumnya diberikan nilai P_{11}= 3 dan P_{22}= 4 yang disubtitusikan ke persamaan (x) , sehingga bentuk matriks dari $-\boldsymbol{Q}$ adalah

$$-\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4-2f_1)P_{11} - 6P_{12} & (4-f_2)P_{11} - (2+f_1)P_{12} - 3P_{22} \\ (4-f_2)P_{11} - (2+f_1)P_{12} - 3P_{22} & 2(4-f_2)P_{12} - 8P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4-2f_1)(3) & (4-f_2)(3) - 3(4) \\ (4-f_2)(3) - 3(4) & -8(4) \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4-2f_1)(3) & (4-f_2)(3) - 12 \\ (4-f_2)(3) - 12 & -32 \end{bmatrix}$$

Maka benar untuk setiap $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ definit negatif ada $q_{11} < 0$ atau $q_{22} < 0$, akan didapatkan pula nilai feedback control dari $-\boldsymbol{Q}$ sebagai matriks skalar ialah sebagai berikut

Jika berlaku untuk $q_{12} = 0$ berakibat untuk nilai f_2 adalah

$$(4-f_2)(3) - 12 = 0$$

$$f_2 = 0 \tag{4.32}$$

Jika berlaku untuk $q_{11} = q_{22} = -32$ berakibat untuk nilai f_1 adalah

$$(4-2f_1)(3) = -32$$

$$f_1 = \frac{20}{3} \tag{4.33}$$

Disimpulkan bahwa desain feedback kontrol $(A - BF)$ mencapai stabil asimtotik pada metode Lyapunov kuadratik jika dipilih parameter P definit positif dengan nilai gain dari $u = -Fx$ memiliki selang batasan yaitu $f_1 > 4$ dan $f_2 < 4$ ◄

4.3 Implementasi Simulasi dan Hasil simulasi Menggunakan Matlab

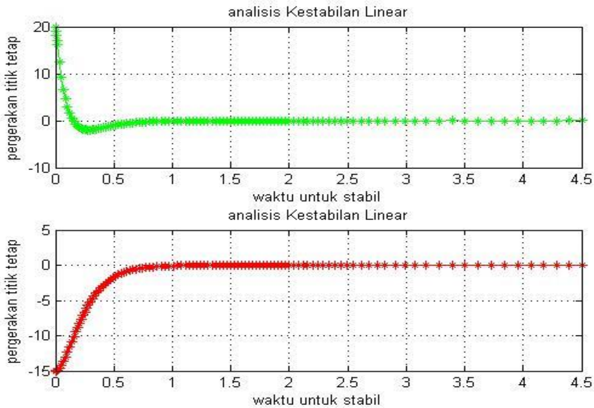
Pendefinisian pada simulasi model Brusselator dapat di interpretasikan dalam bentuk MATLAB yaitu sebagai berikut

a. Pada desain control dengan metode kontruksi Lyapunov diberikan sebuah sistem sebagai berikut $\dot{x} = Ax + Bu$, $(output)$ $x(0) = x_0$ dipilih $u = -Fx$ dengan B matriks bersesuaian$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Maka matriks dari $(A - BF)$ dengan $f_1 > 4\ dan\ f_2 < 4$ yang didapatkan pada pembahasan sebelumnya (4.32 dan 4.33) dinyatakan dalam bentuk berikut

$$(A - BF) = \begin{bmatrix} -(b+1) - f_1 & a^2 - f_2 \\ b & -a^2 \end{bmatrix}$$

dengan $b = -\frac{3}{4}a^2$ sehingga dipilih $b = -3; a = 2$



Gambar 4.7 : Kontrol Feedback dengan Kontruksi Lyapunov

4.3 Alur Program Simulasi

Pada umumnya untuk menyelesaikan bentuk persamaan PD secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta, untuk ODE pada dasarnya sama dengan metode sebelumnya namun ada beberapa hal yang berbeda pada syntax ODE khususnya ODE 45 , persamaan PD yang dibentuk harus di simpan terlebih dahulu pada bentuk M file, dengan membuat M file yang baru akan mudah dengan memanggil M file yang lama dengan perintah “function” pada tab prompt editor, yang selanjutnya akan dibahas pada beberapa argumen berikut :

4.3.1 Persamaan orde Pertama

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u)$$

$$x(0) = x_0$$

a. Membuat M file untuk $f\ (x, u)$,simpan file dengan menu save as, sebagai contoh Yp.m

b. Syntax dasar untuk ODE45, pada MATLAB dengan tipe prompt berikut

$[t, x] = ode45(@yp, [t0, tf], x0);$

dengan keterangan beberapa diantaranya :

- yp merupakan M file yang dibuat untuk $f\ (x, u)$
- $t0, tf$ merupakan *initial* dan *terminal value* untuk *t*
- $x0$ merupakan *initial value* untuk *x* pada t_0

c. Untuk mengetahui hasil dari *running* program tersebut didapatkan jenis prompt berikut

- Untuk mencetak hasil gunakan perintah $[t, x]$
- Untuk mengetahui hasil grafik gunakan perintah *plot (t,x)*

4.3.2 Persamaan orde Kedua

$$\dot{x} = a + x^2y - (b + 1)x$$

$$\dot{y} = bx - x^2y$$

dengan memilih sebarang untuk t sebagai berikut

$$0 \le t \le 4\ dan\ x(0) = 2, y(0) = 8;$$

a. Membuat M file untuk $f\ (x, y) dan\ g(x, y)$,simpan file dengan menu save as, sebagai contoh Lyapunov.m

b. Syntax dasar untuk ODE45, pada MATLAB dengan tipe prompt berikut

$[t, x] = ode45(@lyapunov, [t0, tf], x0);$

$[t, x] = ode45(@lyapunov, [0,4], [x0, y0]);$

dengan keterangan beberapa diantaranya :

- $lyapunov$ merupakan M file yang dibuat untuk $f\ (x, y)$
- $t0, tf$ merupakan *initial* dan *terminal value* untuk *t*
- $x0$ merupakan *initial value* untuk *x* pada t_0

c. Untuk beberapa perintah pada prompt editor sebagai berikut

- $function\ xdot = lyapunov(t, x)$
- $xdot = zeros(2,1)$; %ukuran matriks
- $xdot\_1 = a + x^2 * y - (b + 1) * x$
- $xdot\_2 = b * x - x^2 * y$ %persamaan orde 2
- $xdot = [xdot\_1, xdot\_2]$; %fungsi mengetahui hasil

Untuk mengetahui hasil dari *running* program tersebut didapatkan jenis prompt berikut

- Untuk mencetak hasil gunakan perintah $[t, x]$
- Untuk mengetahui hasil grafik gunakan perintah *plot (t,(x:,1), t,(x:,2))*

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan kajian dan simulasi diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada analisis Kestabilan linear diperoleh beberapa kemungkinan agar sistem stabil diantaranya
   - Untuk $a^2 - b + 1 > 0 \; maka \; Re_{\lambda_{1,2}} < 0$ pergerakan titik x(i) menuju stabil(stabil) .
   - Untuk $a^2 - b + 1 < 0 \; maka \; Re_{\lambda_{1,2}} > 0$ pergerakan titik x(i) keluar/jauh dari stabil(tidak stabil) .
   - Untuk $a^2 - b + 1 = 0 \; maka \; Re_{\lambda_{1,2}} = 0$ pergerakan titik x(i) berosilasi tertutup secara periodik (siklik/tidak stabil).
2. Berdasarkan analisis terhadap persamaan Analisis Kestabilan Sistem selalu mempunyai titik tetap di $(\bar{x}, \bar{y}) = (a, \frac{b}{a})$ apabila dipilih sebarang titik awal yang dekat $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ Titik tetap ini bertipe spiral stabil jika $a^2 - b + 1 > 0$ dan bertipe spiral tak-stabil jika $a^2 - b + 1 < 0$. Pada saat $a^2 - b + 1 = 0$, titik tetap di $(\bar{x}, \bar{y}) = (a, \frac{b}{a})$ = $(2, \frac{5}{2})$ juga stabil tetapi secara nonlinier, artinya laju kekonvergenan solusi ke titik tetap tidak lagi secara eksponensial. Dalam hal ini $a^2 - b + 1 = 0$ disebut titik bifurkasi karena pada titik ini terjadi perubahan kestabilan.

3. Persamaan parameter yang digunakan berbentuk fungsi kuadratik sehingga memudahkan kapan performansi model Brusselator mencapai keadaan stabil , dengan diberikan bentuk persamaan Lyapunov sebagai berikut

$$V(x) = P_{11}x^2 + P_{22}y^2$$

Hal ini bahwa fungsi Lyapunov berbentuk kuadratik parabolik dengan kurva terbuka keatas karena $P_{11} > 0\ dan\ P_{22} > 0$

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x$$

$$\dot{V}(x) = -6(b+1)x^2 + 6a^2xy + 8bxy - 8a^2y^2$$

Hal ini menunjukan bahwa fungsi Lyapunov berbentuk kuadratik parabolic dengan kurva terbuka keatas karena $b = -3\ dan\ a = 2$ berakibat $-6(b+1) > 0\ dan\ -8a^2 < 0$

4. Dengan adanya desain controller dengan metode Pole Placement dan fungsi Lyapunov telah menunjukan bahwa akurasi sistem akan stabil kearah real eigen yang bernilai negatif dengan dengan Pole Placement stabil terjadi ketika $t_{\bar{x},\bar{y}} \geq 2{,}5$ dan untuk kontruksi fungsi Lyapunov stabil terjadi ketika $t_{\bar{x},\bar{y}} \geq 0{,}5$.

5.2 Saran

Tugas akhir ini pada pembentukan modelnya masih menggunakan metode Lyapunov pada persamaan differensial biasa dengan menggunakan MATLAB ODE 45 . Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan dapat mensimulasikan model persamaan energy panas yang bisa lebih bervariasi dengan PD Parsial orde-n dan bisa menmbandingkan performansi pada model Brusselator.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Vaidyanathan*, S. 2015. "**Dynamic and Control of Brusselator Chemical Reaction**". International Journal of ChemTech Research. 8(6), 740-749.

[2] Ault, S. 2013 . "**Analytic Dynamic of the Brusselator**". International Journal of ChemTech. 3(2), 1-17.

[3] Sundari, R. 2017 . "**Kontruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan**". Jurnal Sains ITS .Vol.6, No.1.

[4] Rossalina. 2010. " **Estimasi Kestabilan dengan Fungsi Lyapunov**". Jurnal Tugas Akhir Analisa Kestabilan dengan Kontrol. Universitas Indonesia.

[5] Lina , O. 2011 . "**Penggunaan Metode Lyapunov untuk Menguji Sistem Linear**".Jurnal Tugas Akhir Matematika FMIPA UNAND .Vol. 3 No. 2 Hal 29-33.

[6] Fauri. 2012. " **Stabilisasi Sistem Kontrol Linear dengan Penempatan Nilai Eigen**". Jurnal Matematika UNAND. 2(3) , 126-133.

[7] Malek, M. 2001 . " **Nonlinear System of Ordinary Differential Equations**" California State University, East Bay. 1-8.

[8] Malek, M. 2001 . " **Equilibrium point** " California State University, East Bay. 1-6.

[9] Doyle, J 1990 . "**Feedback Control Theory**". Macmillan Publishing Coorporate.

[10] Lombardo, S. 2008 ."**Nonlinear Stability Reaction System via Optimal Lyapunov Function**".Citta Universitaria, Elsevier 461-476.

L A M P I R A N

LAMPIRAN A

Simulasi Analisis Kestabilan Linear(Stabil Asimtotik)

```
➢ function analisis3_kstabilan2figure
➢ t0= 6;   tfinal = 9.5;            %
  time interval
➢ x0 = [-50, 40];
  % initial conditions
➢ tspan = [t0, tfinal];
  % use with MATLAB 5
➢ [t,x] = ode45(@Lyapunov, tspan, x0);
  % use with MATLAB 5
➢ i= x(:,1);   w = x(:,2);
➢ subplot(2,1,1), plot(t,i,'*-r'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(2,1,2),plot(t,w,'o-b'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(111)
➢ function xdot=Lyapunov(t,x)
➢ b=5;
➢ a=3;
➢ xdot_1=(b-1)*x(1)+ a^2*x(2);
➢ xdot_2=-b*x(1)+-a^2*x(2);
➢ xdot=[xdot_1; xdot_2];
```

```
➢ function analisis3_kstabilan2figure
➢ t0= 6;    tfinal = 9.5;            %
  time interval
➢ x0 = [-50, 40];
  % initial conditions
➢ tspan = [t0, tfinal];
  % use with MATLAB 5
➢ [t,x] = ode45(@Lyapunov, tspan, x0);
  % use with MATLAB 5
➢ i= x(:,1);    w = x(:,2);
➢ subplot(2,1,1), plot(t,i,'*-r'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(2,1,2),plot(t,w,'o-b'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(111)
➢ function xdot=Lyapunov(t,x)
➢ b=12;
➢ a=3;
➢ xdot_1=(b-1)*x(1)+ a^2*x(2);
➢ xdot_2=-b*x(1)+-a^2*x(2);
➢ xdot=[xdot_1; xdot_2];
```

```
➢  function analisis3_kstabilan2figure
➢  t0= 6;   tfinal = 9.5;            %
   time interval
➢  x0 = [-50, 40];
   % initial conditions
➢  tspan = [t0, tfinal];
   % use with MATLAB 5
➢  [t,x] = ode45(@Lyapunov, tspan, x0);
   % use with MATLAB 5
➢  i= x(:,1);   w = x(:,2);
➢  subplot(2,1,1), plot(t,i,'*-r'),grid on
➢  title('analisis Kestabilan Linear')
➢  xlabel('waktu untuk stabil')
➢  ylabel('pergerakan titik tetap')
➢  subplot(2,1,2),plot(t,w,'o-b'),grid on
➢  title('analisis Kestabilan Linear')
➢  xlabel('waktu untuk stabil')
➢  ylabel('pergerakan titik tetap')
➢  subplot(111)
➢  function xdot=Lyapunov(t,x)
➢  b=5;
➢  a=1;
➢  xdot_1=(b-1)*x(1)+ a^2*x(2);
➢  xdot_2=-b*x(1)+-a^2*x(2);
➢  xdot=[xdot_1; xdot_2];
```

LAMPIRAN B

Simulasi Persamaan Lyapunov dengan Parameter dan Turunannya

```
batas_x=linspace(-10,10,20);
batas_y=linspace(-10,10,20);
[X,Y] = meshgrid(batas_x,batas_y);
p=1:2:300;
q=1:2:300;
for i=1:length(p)
for j=1:length(q)
Z = (p(i)*X.^2+ q(j)*Y.^2);
end
end
mesh(X,Y,Z);
surf(X,Y,Z);
title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
xlabel('waktu untuk stabil')
ylabel('pergerakan titik tetap')
zlabel('kestabilan Lyapunov')
figure; contour(X,Y,Z);
gtext('batas_x');gtext('batas_y');gtext
('nilai_fungsi');
title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
xlabel('waktu untuk stabil')
ylabel('pergerakan titik tetap')
zlabel('kestabilan Lyapunov')
figure; meshc(X,Y,Z);
title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
xlabel('waktu untuk stabil')
ylabel('pergerakan titik tetap')
zlabel('kestabilan Lyapunov')
figure; plot3(X,Y,Z);
```

```
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ zlabel('kestabilan Lyapunov')
➢ batas_x=linspace(-10,5,40);
➢ batas_y=linspace(-10,5,40);
➢ [X,Y] = meshgrid(batas_x,batas_y);
➢ b=-3:0.5:0;
➢ a=0:0.05:2;
➢ p=1:10:100;
➢ q=1.1:10:100;
➢ for i=1:length(a)
➢ for j=1:length(b)
➢ for k=1:length(p)
➢ for l=1:length(q)
➢ Z_dot = (-2*p(k)*(b(j)+1)*X.^2
  +(p(k)*a(i)^2+q(j)*b(j))*X.*Y -
  2*q(j)*a(i)^2*Y.^2);
➢ end
➢ end
➢ end
➢ end
➢ mesh(X,Y,Z_dot);
➢ surf(X,Y,Z_dot);
➢ title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ zlabel('kestabilan Lyapunov')
➢ figure; contour(X,Y,Z_dot);
➢ gtext('batas_x');gtext('batas_y');gtext
  ('nilai_fungsi');
➢ title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
```

```
zlabel('kestabilan Lyapunov')
figure; meshc(X,Y,Z_dot);
title('PERSAMAAN LYAPUNOV')
xlabel('waktu untuk stabil')
ylabel('pergerakan titik tetap')
zlabel('kestabilan Lyapunov')
figure; plot3(X,Y,Z_dot);
xlabel('waktu untuk stabil')
ylabel('pergerakan titik tetap')
zlabel('kestabilan Lyapunov')
```

LAMPIRAN C

Simulasi Desain Feedback Controller dengan metode Pole Placement dan Kontruksi Lyapunov

```
➢ function first_oder_ode
➢ t0= 0;   tfinal = 4.5;                %
  time interval
➢ x0 = [20,-15];                        %
  initial conditions
➢ tspan = [t0, tfinal];
  % use with MATLAB 5
➢ [t,x] = ode45(@desainfdbck, tspan, x0);
  % use with MATLAB 5
➢ i= x(:,1);    w = x(:,2);
➢ subplot(2,1,1), plot(t,i,'*-g'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(2,1,2),plot(t,w,'*-r'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(111)
➢ function xdot = desainfdbck(t,x)
➢ b=-3
➢ a=2
➢ f1=1
➢ f2=0.67
➢ A=[-(b+1)-f1,a^2-f2;b,-a^2];
➢ BF=[f1,f2;0,0];

➢ xdot =[(A-BF)*x];
```

```
➢ function first_oder_ode
➢ t0= 0;   tfinal = 4.5;              %
  time interval
➢ x0 = [20,-15];                      %
  initial conditions
➢ tspan = [t0, tfinal];
  % use with MATLAB 5
➢ [t,x] = ode45(@desainfdbck, tspan, x0);
  % use with MATLAB 5
➢ i= x(:,1);    w = x(:,2);
➢ subplot(2,1,1), plot(t,i,'*-g'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(2,1,2),plot(t,w,'*-r'),grid on
➢ title('analisis Kestabilan Linear')
➢ xlabel('waktu untuk stabil')
➢ ylabel('pergerakan titik tetap')
➢ subplot(111)
➢ function xdot = desainfdbck(t,x)    %
  returns the state derivatives
➢ b=-3
➢ a=2
➢ f1=6.67
➢ f2=0
➢ A=[-(b+1)-f1,a^2-f2;b,-a^2];
➢ BF=[f1,f2;0,0];

➢ xdot =[(A-BF)*x];
```

Penulis bernama Rizky Rakhmawan atau yang biasa dipanggil dengan Rizky. Penulis dilahirkan di Surabaya, 20 Desember 1991. Penulis merupakan putra kedua dari pasangan Bapak H.Kasim dan Hj. Rustining Wulan. Penulis menempuh pendidikan di TK ISLAMIYAH, SDN Geluran, SMP Negeri 1 Taman Sidoarjo, dan SMA Muhammadiyah 1 Taman. Kemudian penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika ITS pada tahun 2010 untuk menempuh pendidikan S1 Matematika dengan NRP 1210100053. Di Jurusan Matematika ITS, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yang terdiri atas Pemodelan Matematika dan Simulasim.Selama kuliah penulis juga mengikuti kegiatan organisasi yaitu aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika ITS (HIMATIKA ITS). Pada tahun periode 2011 – 2013. penulis menjadi staff Departemen Hubungan Luar HIMATIKA ITS dan pada tahun periode 2012-2013 penulis menjabat salah satu program kerja sebagai Kepala Keamanan dan Perijinan OMITS HIMATIKA ITS. Selain aktif dalam organisasi, penulis aktif dalam kerja sama antar sekolah tingkat SMA di kalangan Mahasiswa Matematika ITS. Untuk informasi lebih lanjut dan jika ingin memberikan saran Tugas Akhir ini bisa ditujukan ke penulis melalui email rizky_raizin10@yahoo.co.id .